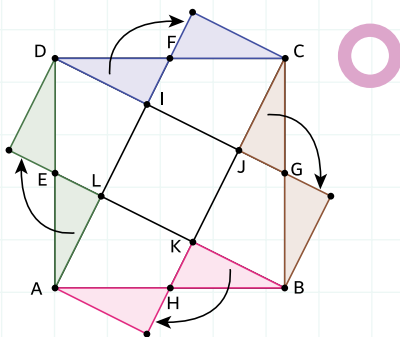


قسمت سوم □ شراره تقی دستجردی، صبا قاسمی

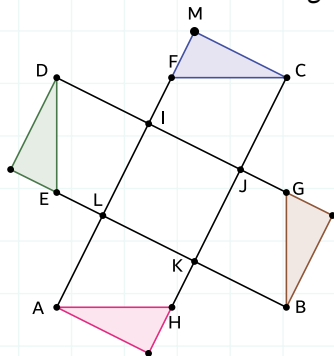
# استدلال‌های غلط درست‌نما

با خوش‌حالی گفت: «اجازه من حلش کردم!» همه بچه‌ها با تعجب به رها نگاه کردند. آخر هنوز دو دقیقه هم نشده بود که معلم مسئله را مطرح کرده بود. برخلاف همیشه که اگر کسی تمرینی را سریع حل می‌کرد، معلم از او می‌خواست کمی صبر کند تا بقیه دانش‌آموزان هم فرصت فکر کردن داشته باشند، این بار همان موقع از رها خواست تا راه‌حلش را بگوید. **رها:** اجازه این مسئله ساده‌تر از آنی بود که فکر می‌کردم. ما اینجا چهار مثلث کوچک داریم. من جای این مثلث‌ها را تغییر می‌دهم تا شکل جدیدی پیدا کنم (شکل ۲).



شکل ۲

خب الان من به‌جای این چهار تا مثلث کوچک، چهار تا مثلث دیگر کشیده‌ام که دقیقاً هم‌اندازه با آن قبلی‌ها هستند. پس با اجازه‌تان دیگر آن قبلی‌ها را پاک می‌کنم تا شکل جدید را بهتر ببینید (شکل ۳).



شکل ۳

مساحت مربع بزرگ ABCD برابر است با مساحت این ۵ مربع. پس نسبت مساحت مربع IJKL به مساحت مربع ABCD، یک‌به‌پنج است. دهان بچه‌ها از راه‌حل خلاقانه رها بازمانده بود: چقدر ساده و چقدر زیبا! **معلم:** بسیار خوب. بچه‌ها راه‌حل رها را دیدید. آیا شما هم تأیید می‌کنید که استدلالش درست است؟

## زنگ تفریح

رها و معلم ریاضی‌اش گرم گفت‌وگو بودند که صدای زنگ مدرسه آن‌ها را به خودشان آورد. تعدادی از سؤال‌های رها بی‌پاسخ مانده بودند، اما معلم برای تدریس ریاضی باید به کلاس دیگری می‌رفت. سؤال‌های رها بیشتر پیرامون لزوم استدلال‌های هندسی بود. او هنوز هم قانع نشده بود چرا باید این قدر وقت صرف اثبات‌های هندسی کند؛ آن هم وقتی که از روی شکل درستی آنچه را می‌خواهد ثابت کند درست است، به راحتی می‌بیند.

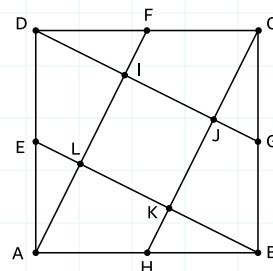
معلم در حالی که خودکار و کاغذش را در کیفش می‌گذاشت گفت: «رها جان، فردا دوباره با کلاس شما ریاضی دارم. ان‌شاء‌الله فردا در کلاس بیشتر صحبت می‌کنیم.»

## در کلاس ریاضی

معلم وارد کلاس شد و شروع کرد به کشیدن شکلی روی تخته. او از دیروز که با رها صحبت کرده بود، به چندین مسئله اثباتی در هندسه فکر کرده بود تا یکی از آن‌ها را در کلاس مطرح کند. مسئله‌ای که هم برای دانش‌آموزانش چالش برانگیز باشد و هم با آن رها را متوجه این امر کند که: «شکل‌ها، اگرچه غالباً ایده‌های اثبات‌های هندسی را به ما نشان می‌دهند، اما نمی‌توانند جای اثبات را برای ما بگیرند.»

دیشب موقعی که داشت قفسه کتاب‌های ریاضی کتابخانه‌اش را مرتب می‌کرد، چشمش به یک کتاب هندسه نسبتاً قدیمی از **مویز و دانز افتاد.** کتاب را برداشت و آرام‌آرام آن را ورق زد. از همین کتاب مسئله مورد نظرش را انتخاب کرد.

**معلم:** خوب بچه‌ها، قبل از اینکه به سراغ درس جدید برویم، لطفاً به این مسئله فکر کنید: وسط ضلع‌های مربع ABCD را با G, F, E و H نام‌گذاری کرده‌ام. با توجه به شکل ۱، نسبت مساحت مربع IJKL به مساحت مربع ABCD چیست؟




شکل ۱

مسئله به قدری جالب بود که همه دانش‌آموزان را درگیر کرد. بچه‌ها داشتند روی شکل علامت‌گذاری می‌کردند تا ارتباط بین پاره‌خط‌های ایجاد شده در شکل را با هم ببینند که ناگهان رها

به نظر شما آیا استدلال رها «درست» است؟ آیا هر مرحله از استدلال او دلیلی «منطقی» دارد؟

در دنیای ریاضی باید برای هر آنچه ادعا می‌کنیم، دلیلی درست و منطقی داشته باشیم؛ دلیلی که مستقل از شکل، شهود و دریافت‌های ما از حس‌های پنج‌گانه باشد. همان‌طور که در دو قسمت قبل هم اشاره شد، شکل‌ها صرفاً ابزاری هستند که به ما کمک می‌کنند راه‌حل را راحت‌تر «ببینیم»، اما به‌هیچ‌عنوان تضمین نمی‌کنند که آن راه‌حل تماماً درست باشد؛ به‌خصوص که ممکن است در «دیدن» دچار خطا شده باشیم.

به استدلال رها بازگردیم. اگر ادامه آنچه را که در کلاس گذشت، با پویش رمزینۀ مقابل ببینید، متوجه می‌شوید ایده  رها تنها هنگامی درست است که نقطه‌های  $G, F, E$  و  $H$  وسط ضلع‌های مربع  $ABCD$  باشند.

با این حال، «ایده رها» هنوز هم تا رسیدن به «اثبات» آنچه که ادعا می‌کند، فاصله دارد؛ چرا که ایده او بر این اساس است که چهار مثلث کوچک داخل مربع  $ABCD$ ، با چهار مثلثی که بیرون مربع کشیده است، هم‌نهشت هستند و دقیقاً آنچه که در استدلال او گم شده است، اثبات همین هم‌نهشتی‌هاست. **در واقع، ادعای رها درست است، اما دلیلی که برای آن می‌آورد، ناقص است.** دقت کنید که در این مسئله، رها بدون استفاده از اطلاعاتی که مسئله داده است، نمی‌تواند استدلالش را کامل کند؛ زیرا برای اثبات هم‌نهشتی مثلث‌ها باید از اینکه نقطه‌های  $G, F, E$  و  $H$  وسط اضلاع مربع  $ABCD$  هستند، استفاده کنیم.

اما اجازه دهید از این مسئله فراتر برویم و در حالت کلی این پرسش‌ها را مطرح کنیم: «هدف از اطلاعاتی که مسئله به ما می‌دهد، چیست؟ آیا آن‌ها ناکارآمدند و یا قصدشان گمراه کردن ماست؟ آیا می‌توانیم آن‌ها را تغییر دهیم؟»

در دنیای ریاضیات به اطلاعاتی که مسئله به ما می‌دهد، «فرض» می‌گوییم. در اغلب مسئله‌های ریاضی، از این فرض‌ها باید استفاده شود تا بتوانیم استدلالی درست و کامل ارائه دهیم. اگر اصلاً به آن‌ها احتیاج پیدا نکنیم، احتمالاً یک جای کار می‌لنگد! در واقع، اگر مسئله فرضی بیهوده به ما داده باشد، می‌توانیم آن را تغییر دهیم یا حذف کنیم؛ بدون آنکه راه‌حل ما دستخوش تغییری شود. یا می‌توانیم بدون در نظر گرفتن آن فرض، راه‌حل درست دیگری ارائه کنیم. برای مثال، دیدید که در مسئله معلم رها، این فرض که نقطه‌های  $G, F, E$  و  $H$  وسط ضلع‌ها هستند، اضافی نبود.

البته گاهی ممکن است طراح مسئله متوجه این نکته نشده باشد که مسئله با فرضیه‌هایی کمتر یا فرضیه‌هایی دیگر حل می‌شود، به همین دلیل اگر در راه‌حل‌تان از همه فرضیه‌ها استفاده نکردید، از درستی کارتان ناامید نشوید.

ادامه دارد...



همه بچه‌ها استدلال او را درست دانستند.

**معلم:** خوب، به نظر می‌رسد که راه‌حل مورد قبول بقیه هم هست. اما ... رها، من دارم به این فکر می‌کنم که به نظر می‌رسد تو از اینکه نقطه‌های  $G, F, E$  و  $H$  وسط ضلع‌های مربع بزرگ هستند، هیچ استفاده‌ای نکرده‌ای؟  
**رها:** نه.

**معلم:** پس به نظر تو چرا در مسئله گفته شده است که این نقطه‌ها وسط ضلع‌ها هستند؟

**رها:** شاید می‌خواستند ما را منحرف کنند.

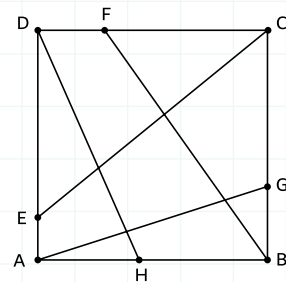
**معلم:** پس با این حساب فکر می‌کنی اگر این نقطه‌ها دقیقاً وسط نباشند، باز هم می‌توان مثلث‌های جدید را کشید و ...  
**رها:** بله، چرا نتوانیم.

**معلم:** اگر این‌طور باشد، ما می‌توانیم فرض دیگری برای مسئله جایگزین کنیم.

**رها:** بله.

**معلم:** خوب، پس در مورد نقطه‌های  $G, F, E$  و  $H$  چه می‌گویی؟  
**رها:** جای این نقطه‌ها مهم نیست. روی هر ضلع یک نقطه قرار می‌دهم و به روشی که شکل مسئله نشان می‌دهد، نقطه‌ها را به رأس‌ها وصل می‌کنم.

معلم روی تخته شکل جدیدی کشید (شکل ۴).



شکل ۴

**رها:** اوه اوه. چی شد! اصلاً دیگر آن وسط مربعی نداریم. رها داشت فکر می‌کرد چطور حرفش را اصلاح کند که از ته کلاس کسی با صدای بلند گفت: «جازه، شاید باید بگوییم که فاصله نقطه‌ها تا رأس‌ها یکسان باشد. مثلاً اگر اندازه  $DF$  یک‌چهارم اندازه ضلع مربع است، اندازه‌های  $BH, CG$  و  $AE$  هم باید یک‌چهارم از اندازه ضلع مربع باشد.

**معلم:** پیشنهاد خوبی است. اجازه بدهید آن را بررسی کنیم. اما به‌جای آنکه شکل را روی تخته بکشیم، آن را در محیط «جئوجبرا» رسم می‌کنم.

برای آنکه ببینید آن روز در کلاس چه گذشت، رمزینۀ پاسخ‌سریع (کیوآر کد) مقابل را پویش کنید.

